ZUR ISOMORPHIE ZWISCHEN TORNIERSCHEN NULLRÄUMEN UND PRÜFERSCHEN RINGEN

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
GENEHMIGT VON DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

HEINRICH KLEINSORGE
AUS PADERBORN

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 23. FEBRUAR 1938
TAG DER PROMOTION: 15. JUNI 1938

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

N 35

REFERENTEN:
PROFESSOR DR. E. TORNIER
PROFESSOR DR. L. BIEBERBACH

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin“ / Band 4

§ 1. Der Torniersche Nullraum als metrischer Raum.

Als Grundlage unserer Überlegungen nehmen wir Mengen, in denen ein Umgebungsbegriff erklärt ist. Dabei sollen stets die vier HAUSDORFFschen Umgebungsaxiome gelten:

1. Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung U_x; jede Umgebung U_x enthält den Punkt x.

2. Sind U_x und V_x zwei Umgebungen desselben Punktes x, so gibt es eine Umgebung W_x, die Teilmenge von beiden ist.

3. Liegt der Punkt y in U_x, so gibt es eine Umgebung U_y, die Teilmenge von U_x ist.

4. Für je zwei verschiedene Punkte x und y gibt es zwei Umgebungen U_x und U_y ohne gemeinsamen Punkt.

Einen wichtigen Spezialfall obiger Mengen bilden die metrischen Räume. Für sie gelten die drei Abstandsaxiome:

1. Es ist stets $\overline{xy} = \overline{yx}$.

2. Es ist dann und nur dann $\overline{xy} = 0$, wenn $x = y$ ist.

3. Es ist stets $\overline{xy} + \overline{yz} \geqq \overline{xz}$.

Für derartige Räume sind die HAUSDORFFschen Axiome erfüllt, wenn wir einem Punkt x als Umgebungen U_x die Mengen aller y mit $\overline{xy} < \varrho$ $(\varrho > 0)$ zuordnen. Für jedes ϱ existiert eine Umgebung U_x.

Wir betrachten einen Spezialfall der metrischen Räume, den TORNIERschen Nullraum. Ausgangspunkt ist die allgemeine Folgenmenge, deren Elemente die Folgen

$$e_1^{(r_1)},\ e_2^{(r_1)(r_2)},\ e_3^{(r_1, r_2)(r_3)}, \ldots$$

sind, wo r_n in $(r_1, \ldots, r_{n-1})$ (r_n) alle ganzen Zahlen mit

$$0 \leqq r_n \leqq t_{r_1, \ldots, r_{n-1}} \leqq \infty$$

durchlaufen darf. Einfacher schreiben wir dafür

$$r_1, r_2, \ldots \text{ mit } 0 \leqq r_n \leqq t_n(r_1, \ldots, r_{n-1}) \leqq \infty$$

und wegen der wahrscheinlichkeitstheoretischen Anwendungen

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

also als Spalte.

Je zwei derartigen Spalten können wir in einfacher Weise einen Abstand zuordnen. Wenn die Anfangsabschnitte zweier Spalten bis zur $(n-1)$-ten Stelle übereinstimmen, sich aber an der n-ten unterscheiden, so beträgt der Abstand der zugehörigen Punkte des TORNIERschen Nullraums $\frac{1}{n}$. Zwei gleiche Spalten erhalten den Abstand 0. Wie wir sofort sehen, erfüllt diese Abstandsdefinition die drei Axiome des metrischen Raumes. Der Nullraum ist vollständig; denn für jede Fundamentalfolge $r_i^{(1)}, r_i^{(2)}, \ldots$ existiert $\lim_{k\to\infty} r_i^{(k)} = r_i$ für jedes einzelne i, und die Folge r_i gehört zum Raum.

§ 2. Vollständige Unterräume des Tornierschen Nullraumes; ihre Darstellung durch Summen von Restklassenschachtelungen.

Aus dem TORNIERschen Nullraum konstruieren wir vollständige Unterräume, indem wir unendliche Matrizen

$$(a_{ik}) \text{ mit } a_{ik} \leqq t_i(a_{1k}, \ldots, a_{i-1,k})$$

betrachten, deren Elemente höchstens abzählbar viele nichtnegative ganze Zahlen sind. Wir denken uns die Menge sämtlicher denkmöglichen Spalten mit $a_i \leqq t_i(a_1, \ldots, a_{i-1})$ gebildet und nehmen aus ihr die Teilmenge der Spalten, die durch vorkommende Spalten der gegebenen Matrix (a_{ik}) approximiert werden können. Dabei benutzen wir solche Matrizen, deren Elemente nach einem bestimmten zahlentheoretischen Gesetz ausgewählt sind. Der entstandene Unterraum ist vollständig, da jede Fundamentalfolge konvergiert. Für jede vorgegebene Spalte läßt sich leicht entscheiden, ob sie zum Raum gehört oder nicht. Hauptsächlich spezialisieren wir in folgender Weise: a_{ik} vertrete die Restklasse $k \pmod i$:

$$a_{ik} \equiv k \pmod i,\ 0 \leqq a_{ik} < i \qquad (i, k = 1,2,\ldots).$$

Dieser Unterraum ist nach dem Obigen vollständig. Es gilt der Satz:

Eine vorgegebene Spalte a_i läßt sich dann und nur dann durch Spalten der zahlentheoretischen Matrix approximieren, wenn $0 \leqq a_i < i$ ist und wenn aus j/i folgt $a_j \equiv a_i \pmod j$.

Zunächst genüge die Spalte a_i den beiden Bedingungen. Wir setzen $k = k_n = a_{n!} + n!$ Dann gilt $k \equiv a_{n!} \equiv a_i \pmod i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ wegen $i/n!$, und andererseits ist $a_{ik} \equiv k \pmod i$, also auch $a_i \equiv a_{ik} \pmod i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$; aus $0 \leqq a_i < i$ und $0 \leqq a_{ik} < i$ folgt jetzt $a_i = a_{ik}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Wir haben damit eine Spalte a_{ik} gefunden, die mit einem beliebigen Anfangsabschnitt der gegebenen

Spalte a_i übereinstimmt. Umgekehrt lasse sich die Spalte a_i durch die Spalten a_{ik} approximieren. Dann gibt es zu jedem i ein k mit $a_i = a_{ik}$; es ist $0 \leqq a_{ik} < i$, somit $0 \leqq a_i < i$. Ist ferner j/i, so ist für passendes k zugleich $a_j = a_{jk}$ und $a_i = a_{ik}$; wegen $a_{ik} \equiv k \pmod{i}$ ist $a_{ik} \equiv k \pmod{j}$, wegen $a_{jk} \equiv k \pmod{j}$ also $a_{jk} \equiv a_{ik} \pmod{j}$, d. h. $a_j \equiv a_i \pmod{j}$.

Nun können wir von jeder Spalte entscheiden, ob sie zu dem durch die Matrix bestimmten vollständigen Unterraum gehört oder nicht. Das Kongruenzensystem $a_i \equiv a_j \pmod{j}$ für j/i schreiben wir um. Jede Kongruenz wird aufgelöst in ein Kongruenzensystem nach den höchsten Primzahlpotenzen, die im Modul j aufgehen. i sei eine zusammengesetzte Zahl mit der kanonischen Darstellung

$$i = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

Dabei sollen mindestens zwei verschiedene Primzahlen auftreten. Dann ist

$$a_i \equiv a_{p_\varrho^{\alpha_\varrho}} \left(\mathrm{mod}\ p_\varrho^{\alpha_\varrho}\right) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r;\ 0 \leqq a_i < i).$$

Hierdurch ist a_i schon eindeutig festgelegt. Die $a_{p_\varrho^{\alpha_\varrho}}$ stehen in der Spalte über a_i. Das Element, das in einer zulässigen Spalte an einer Stelle mit aus verschiedenen Primzahlen zusammengesetztem Index steht, ist bereits durch seine Vorgänger bestimmt. Wir kennen die Spalten, sobald wir sämtliche a_{p^α} kennen. Von diesen haben wir gemäß obigem Kongruenzensystem zu fordern, daß

$$a_{p^\beta} \equiv a_{p^\alpha} \pmod{p^\beta} \text{ für } 0 < \beta < \alpha$$

ist; sie lassen sich daher nicht beliebig vorschreiben. Statt dessen können wir die Bedingung

$$a_{p^\alpha} \equiv a_{p^{\alpha+1}} \pmod{p^\alpha}$$

verlangen, da die vorhergehende aus dieser durch Induktion folgt.

Für eine feste Primzahl p bilden die Restklassen $a_p \pmod{p}$, $a_{p^2} \pmod{p^2}, \ldots$ eine Restklassenschachtelung $\mathfrak{R}_p$: jede dieser Restklassen ist in der vorangehenden enthalten. Ist für jedes p eine $\mathfrak{R}_p$ vorgegeben, so gehören die $\mathfrak{R}_p$ zu genau einer Spalte unseres vollständigen Unterraumes. Denn zunächst setzen wir a_{p^ϱ} gleich dem Restklassenrepräsentanten, der die Ungleichung

$$0 \leqq a_{p^\varrho} < p^\varrho$$

erfüllt. Dann zerlegen wir jeden Zeilenindex i kanonisch und bestimmen a_i durch das Kongruenzensystem

$$a_i \equiv a_{p_\varrho^{\alpha_\varrho}} \left(\mathrm{mod}\ p_\varrho^{\alpha_\varrho}\right) \qquad (0 \leqq a_i < i).$$

Wir haben zu zeigen, daß für die so bestimmten a_i aus j/i auch $a_j \equiv a_i \pmod{j}$ folgt. Es sei

$$i = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \text{ und } j = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r} \text{ mit } \beta_r \leqq \alpha_r.$$

Es ist

$$a_i \equiv a_{p_\varrho^{\alpha_\varrho}} \equiv a_{p_\varrho^{\beta_\varrho}} \equiv a_j \pmod{p_\varrho^{\beta_\varrho}},$$

folglich auch

$$a_i \equiv a_j \pmod{j}.$$

Die Spalte ist eindeutig bestimmt. Unser Raum ist eineindeutig der Menge aller Systeme von $\mathfrak{R}_p$ für $p = 2, 3, 5, 7, \ldots$ zugeordnet, und wir haben den Satz:

Wenn für jede Primzahl eine Restklassenschachtelung vorgegeben ist, dann gibt es dazu eine Spalte des Unterraumes und umgekehrt.

§ 3. Übergang von den Restklassenschachtelungen ins p-adische; Prüfersche Ringe.

Nun wollen wir einen Übergang von den Restklassenschachtelungen zu den p-adischen Zahlen machen. Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der Bewertung $\varphi(x)$ eines Körpers ein, für den folgende vier Bedingungen gelten:

$$\varphi(x) \geqq 0 \text{ reell}; \ \varphi(0) = 0; \ \varphi(x) > 0 \text{ für } x \neq 0;$$
$$\varphi(x + y) \leqq \varphi(x) + \varphi(y);$$
$$\varphi(x\,y) = \varphi(x)\,\varphi(y);$$
$$\varphi(x) \neq 1 \text{ für wenigstens ein } x \neq 0.$$

Die Bewertung heißt nichtarchimedisch, wenn $\varphi(n) \leqq 1$ für alle ganzen n gilt. Für sie gilt die zweite Bedingung in der verschärften Form

$$\varphi(x + y) \leqq \operatorname{Max}(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Eine Bewertung dieser Art erhalten wir, wenn wir einer rationalen Zahl $x = p^\varrho x_0$ mit $(p, x_0) = 1$ als p-Betrag die Zahl $|x|_p = p^{-\varrho}$ zuordnen. Zu dieser Bewertung gehört der perfekte Erweiterungskörper R_p, der den ursprünglichen Körper enthält. In diesem p-adischen Körper R_p liegt der Integritätsbereich J_p aller für p ganzen Zahlen. J_p besteht aus allen p-adischen Zahlen x mit $|x|_p \leqq 1$. x ist dann und nur dann durch p^ϱ teilbar, wenn $|x|_p \leqq p^{-\varrho}$ ist. Hier heißt teilbar, daß der Quotient $\frac{x}{p^\varrho}$ noch in J_p liegt, also für p ganz ist.

Liegt x in J_p, dann war eine Umgebung von x die Menge aller y mit $| x - y |_p < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Da als p-Beträge nur die p-Potenzen mit ganzen Exponenten in Frage kommen, sind die Umgebungen von x genau die Mengen der y mit $| x - y |_p \leqq p^{-\varrho}$ für alle $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$, d. h. die Restklassen mod p^ϱ von x. Jeder Punkt ist durch die ineinandergeschachtelte Folge von Umgebungen einer $\mathfrak{R}_p$ bestimmt. Auf jedes x in J_p zieht sich die x enthaltende $\mathfrak{R}_p$ zusammen, und umgekehrt zieht sich auch jede $\mathfrak{R}_p$ auf ein in J_p liegendes x zusammen. (Wählen wir z. B. in jeder Restklasse mod p^ϱ ein y_ϱ, so konvergiert y_ϱ p-adisch gegen x.) Wir haben hierdurch den p-adischen Zahlen aus J_p eineindeutig die $\mathfrak{R}_p$ in J_p zugeordnet. Die $\mathfrak{R}_p$ in J_p entsprechen bekanntlich den ganzrationalen $\mathfrak{R}_p$ für p. Jeder Restklasse x (mod p^ϱ) des Ringes J der ganzrationalen Zahlen ordnen wir im Bereich J_p der für p ganzen p-adischen Zahlen die Restklasse x (mod p^ϱ) zu. Dies ist eine eineindeutige Zuordnung der Restklassen mod p^ϱ in J und der Restklassen mod p^ϱ in J_p.

Oben haben wir jede Spalte durch eine Gesamtheit von $\mathfrak{R}_p$ in J für jedes p beschrieben. Diese $\mathfrak{R}_p$ übertragen wir in das jeweils zugehörige J_p und ordnen ihnen die p-adischen Zahlen x_p zu, auf die sie sich zusammenziehen. So ist jeder Spalte eine Folge von p-adischen Zahlen x_p in J_p mit $p = 2, 3, 5, \ldots$ zugeordnet; wenn wir umgekehrt eine Folge x_2 in J_2, x_3 in J_3, x_5 in J_5, ... ganz beliebig vorschreiben, so gehört dazu für jedes p eindeutig eine $\mathfrak{R}_p$, und diese $\mathfrak{R}_p$ legen wieder eine Spalte eindeutig fest. Unser Unterraum ist eineindeutig abgebildet auf die Menge aller Folgen $x_2, x_3, x_5, \ldots$, wo jeweils x_p in J_p liegt.

Diese Zuordnung beschreiben wir nochmals genau. Ist eine Spalte a_i mit $0 \leqq a_i < i$ und $a_i \equiv a_j \pmod{j}$ für j/i gegeben, so betrachten wir für jedes p die Folge der Restklassen $a_{p^\varrho} \pmod{p^\varrho}$. Dies ist eine $\mathfrak{R}_p$, welche wir auch als $\mathfrak{R}_p$ in J_p ansehen können. Das Element, auf das sie sich zusammenzieht, ist der p-adische Grenzwert $\lim\limits_{\varrho \to \infty} a_{p^\varrho}$. Ist umgekehrt für jedes p ein x_p in J_p vorgegeben, so bestimmen wir die ganzrationale Zahl a_{p^ϱ} aus der Kongruenz $a_{p^\varrho} \equiv x_p \pmod{p^\varrho}$ in J_p mit der Nebenbedingung $0 \leqq a_{p^\varrho} < p^\varrho$. Dann zerlegen wir jeden Zeilenindex kanonisch $i = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ und bestimmen a_i aus $a_i \equiv a_{p_\varrho^{\alpha_\varrho}} \pmod{p_\varrho^{\alpha_\varrho}}$ mit $0 \leqq a_i < i$.

Wir haben hier eine eineindeutige Zuordnung zwischen einem speziellen metrischen Raum und einem zahlentheoretischen Ring, nämlich zwischen dem Tornierschen Nullraum und dem Prüferschen Ring.

Die Elemente dieses Ringes sind Größen, die umkehrbar eindeutig Systemen von Kongruenzen zugeordnet sind. Da Kongruenzen nach demselben Modul eindeutig addiert und multipliziert werden können, folgt in der Tat die Ringeigenschaft dieser Menge von Größen.

§ 4. Übertragung der Metrik und Integrationstheorie aus dem Tornierschen Nullraum in den Prüferschen Ring.

Im Nullraum existiert eine Metrik und eine Integrationstheorie; im Ring können wir addieren und multiplizieren. Wegen der Isomorphie der beiden Gebilde können wir diese Begriffe wechselseitig übertragen, wobei wir uns auf die besonders wichtigen Dinge beschränken wollen. Die Addition und Multiplikation zweier PRÜFERschen Zahlen überträgt sich in den Nullraum als Addition und Multiplikation der zugehörigen Kongruenzensysteme, d. h. der zugehörigen Spalten, reduziert nach dem Modul

$$(a_i) \pm (b_i) = (c_i) \quad \text{und} \quad (a_i)(b_i) = (c_i),$$

wo $a_i \pm b_i \equiv c_i \pmod{i}$ bzw. $a_i b_i \equiv c_i \pmod{i}$ mit $0 \leqq c_i < i$ ist.

Wichtiger ist die Übertragung der Metrik in den PRÜFERschen Ring $\tilde{J}$. Wir haben zwei verschiedene Elemente von $\tilde{J}$ und wollen den Abstand der isomorph zugeordneten Elemente bestimmen. Die erste Stelle, an der sich die zugeordneten Spalten unterscheiden, ist eine Primzahlpotenz; denn wäre es eine aus verschiedenen Primfaktoren zusammengesetzte Zahl, so wäre der Wert schon vorher bestimmt. p^α sei die Nummer der Zeile, an der sich die Spalten erstmals unterscheiden. Dann sind für alle $q^\beta < p^\alpha$ die entsprechenden q-adischen Komponenten kongruent. Als Abstand der beiden Spalten wurde die Zahl $\frac{1}{p^\alpha}$ bezeichnet. Diese heißt nunmehr zugleich der Abstand der beiden PRÜFERschen Zahlen. Wir bestimmen andererseits für alle q den q-adischen Betrag der Differenz der q-adischen Komponenten der beiden PRÜFERschen Zahlen. Sind die beiden Komponenten gleich, so erhalten wir Null. Sind sie mod q^β, nicht aber mod $q^{\beta+1}$ kongruent, so ist der Betrag $\frac{1}{q^\beta}$. Dividieren wir für jedes q den q-adischen Betrag der Differenz der q-adischen Komponenten der PRÜFERschen Zahlen stets noch durch q und nehmen unter den so erhaltenen Brüchen den größten, so ist dies genau die Zahl $\frac{1}{p^\alpha}$, d. h. der Abstand der beiden PRÜFERschen Zahlen.

Aus der Konstruktion unseres Nullraumes können wir sofort schließen, daß hinsichtlich der soeben konstruierten Metrik des PRÜFERschen Ringes die natürlichen Zahlen in demselben überall dicht liegen. Denn der natürlichen Zahl k, aufgefaßt als Element des PRÜFERschen Ringes, entspricht genau die k-te Spalte der Matrix (a_{ik}).

Jede Metrik impliziert einen Umgebungsbegriff. Wir ersetzen das obige Umgebungssystem durch ein zahlentheoretisch bequemeres. Dabei ergibt sich der Zusammenhang des Nullraumes mit dem Ring noch deutlicher. Da allgemein der Abstand von x und y gleich dem Abstand von $y - x$ und o ist, genügt die Betrachtung der Umgebung von Null. Ist x eine PRÜFERsche Zahl und sind $x_2, x_3, x_5, \ldots$ ihre p-adischen Komponenten, so war $\overline{x\,0} = \operatorname{Max}_p \frac{1}{p} |x_p|_p$. Wir erhalten ein äquivalentes Umgebungssystem, wenn wir der Null als Umgebung jede Menge zuordnen, die für eine passende natürliche Zahl n aus den durch n teilbaren Zahlen besteht. Denn es gilt der Satz:

Liegt in einem Ring $\bar{J}$ die Menge der natürlichen Zahlen und ist Null das einzige Element von $\bar{J}$, das durch sämtliche natürlichen Zahlen teilbar ist, so bilden die Restklassen modulo den natürlichen Zahlen in $\bar{J}$ ein Umgebungssystem.

Wir haben nur zu zeigen, daß jedes Element von $\bar{J}$, das durch sämtliche natürlichen Zahlen teilbar ist, verschwindet. Ist aber eine Zahl von $\bar{J}$ durch alle Primzahlpotenzen teilbar, so ist für jedes p jede p-adische Komponente durch alle p^α teilbar; alle p-adischen Komponenten und somit die Zahl selbst verschwinden.

Nun haben wir noch die Äquivalenz unseres Umgebungssystems zu zeigen. Zwei Umgebungssysteme heißen einander äquivalent, wenn in jeder dem einen System angehörigen Umgebung eines Punktes immer noch eine dem anderen System angehörige Umgebung desselben Punktes enthalten ist. Zunächst zeigen wir, daß in jeder Umgebung der Null für geeignetes n jede durch n teilbare Zahl liegt. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen für jedes der endlich vielen $p < \frac{1}{\varepsilon}$ eine natürliche Zahl $\alpha = \alpha_p$ so groß, daß $p^{\alpha+1} > \frac{1}{\varepsilon}$ wird, und setzen

$$n = \prod_{p < \frac{1}{\varepsilon}} p^\alpha .$$

Ist dann x ein Element von $\bar{J}$ und sind x_p seine p-adischen Komponenten, so ist der Abstand von nx und Null gleich

$$\operatorname{Max} \tfrac{1}{p} |n|_p |x_p|_p \leqq \operatorname{Max} \left(\operatorname*{Max}_{p < \frac{1}{\varepsilon}} \tfrac{1}{p^{\alpha+1}}, \varepsilon \right) = \varepsilon .$$

Umgekehrt sei $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ in kanonischer Darstellung gegeben. Wir suchen ein ε, für das jede Zahl, deren Abstand von Null kleiner als ε ist, durch n teilbar ist. Eine p-adische Zahl ist durch n dann und nur dann teilbar, wenn sie durch die in n steckende Primzahlpotenz teilbar ist. Wir setzen

$$\varepsilon = \operatorname*{Min}_{\varrho} \frac{1}{p_\varrho^{\alpha_\varrho}}.$$

Ist der Abstand von x und Null kleiner als ε, so ist für jedes p

$$\frac{1}{p} |x_p|_p < \varepsilon,$$

also auch

$$|x_{p_\varrho}|_{p_\varrho} < \frac{1}{p_\varrho^{\alpha_\varrho - 1}},$$

d. h.

$$|x_{p_\varrho}|_{p_\varrho} \leqq \frac{1}{p_\varrho^{\alpha_\varrho}},$$

also x durch $p_\varrho^{\alpha_\varrho}$ teilbar.

Da für unsere Definition der Äquivalenz von Umgebungssystemen die Gesetze der Reflexivität, der Symmetrie und der Transitivität gelten, ist die Äquivalenz vollständig gezeigt.

In $\tilde{J}$ sind die Restklassen modulo den natürlichen Zahlen ein zu dem obigen äquivalentes Umgebungssystem. Wir wollen den Begriff der Konvergenz von Spalten, der sich von selbst nach $\tilde{J}$ überträgt, p-adisch deuten. Dazu benutzen wir das neue Umgebungssystem. $x^{(n)}$ sei eine Folge von Elementen von $\tilde{J}$, $x_p^{(n)}$ die p-adischen Komponenten. Es gilt der Satz:

$x^{(n)}$ konvergiert dann und nur dann gegen x, wenn für alle p

$$\lim_{n \to \infty} x_p^{(n)} = x_p$$

im p-adischen Sinne gilt.

Zum Beweis können wir uns auf den Fall $x = 0$ beschränken. Dann sind alle $x_p = 0$. Es konvergiert $x^{(n)}$ gegen Null, wenn zuletzt alle $x^{(n)}$ in jeder Umgebung der Null liegen, d. h. wenn jedes Primzahlprodukt in den letzten $x^{(n)}$ aufgeht, also wenn für je endlich viele p für wachsendes n die Zahl $|x_p^{(n)}|_p$ zuletzt beliebig klein wird, d. h. wenn sämtliche $x_p^{(n)}$ gegen Null streben. Hinsichtlich dieses Konvergenzbegriffes ist der PRÜFERsche Ring die kleinste abgeschlossene Hülle der Menge aller natürlichen Zahlen. Der Grenzwert der Summe, der Differenz und des Produktes zweier konvergenter Spalten ist gleich der Summe, der Differenz und dem Produkt der Grenzwerte der konvergenten Spalten, wie sich aus der Definition der Konvergenz sofort ergibt.

Jetzt übertragen wir Maß- und Integrationstheorie aus dem Nullraum in den Ring. Wir schließen uns dabei eng an das TORNIERsche Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung, § 7 (s. Literaturverzeichnis), an. Eine Grundmenge des Nullraumes ist die Gesamtheit aller Spalten mit gleichem Anfang; genauer: Eine Grundmenge n-ter Stufe ist die Menge aller Spalten, die mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beginnen. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist dabei das Anfangsstück irgendeiner in unserem Unterraum liegenden Spalte, nach Definition einer in der Matrix (a_{ik}) vorkommenden Spalte. Zu jedem k und jedem n gibt es genau eine Grundmenge n-ter Stufe, die aus den Spalten besteht, die mit $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ beginnen, und dieses sind auch alle Grundmengen n-ter Stufe. Bei festem n ergeben zwei Zahlen k dann und nur dann dieselbe Grundmenge, wenn sie für $i = 1, 2, \ldots, n$ mod i kongruent sind, also dann und nur dann, wenn sie nach dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen $m(n)$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ kongruent sind. Es gibt $m(n)$ Grundmengen n-ter Stufe. Dann und nur dann gilt $m(n) > m(n-1)$, wenn n eine Primzahlpotenz ist. Infolgedessen ist jede Grundmenge n-ter Stufe zugleich eine Grundmenge, deren Stufe die größte Primzahlpotenz $\leqq n$ ist.

Wir wollen den kleinsten Körper $\mathfrak{k}$ über den Grundmengen bestimmen. Der allgemeinen Theorie entnehmen wir, daß seine Elemente abzählbar sind. Wir behaupten, daß er genau aus den endlichen Summen paarweise fremder Grundmengen besteht. Die Gesamtheit der endlichen Summen paarweise fremder Grundmengen enthält auf Grund der Eigenschaften allgemeiner Grundmengen bereits Summe und Produkt. Es bleibt zu zeigen, daß auch das Komplement einer Summe paarweise fremder Grundmengen sich wieder in dieser Form schreiben läßt. Wir zerlegen alle Grundmengen weiter bis in eine Summe von Grundmengen n-ter Stufe. Ihr Komplement ist dann die Summe aller übrigen Grundmengen n-ter Stufe, und diese ist endlich.

K sei das System der Teilmengen des Raumes, die ebenso wie ihre Komplemente Summen von Grundmengen sind. Wir zeigen, daß $K = \mathfrak{k}$ ist. Andernfalls gäbe es eine Summe abzählbar unendlich vieler paarweise fremder Grundmengen, deren Komplement auch Summe von Grundmengen ist. Wir hätten damit den Nullraum als Summe unendlich vieler paarweise fremder Grundmengen dargestellt.

Eine Folge von Grundmengen 1-ter, 2-ter, ... Stufe erklären wir folgendermaßen: $E^{(n+1)}$ soll in $E^{(n)}$ eine Grundmenge sein, die noch unendlich viele Grundmengen unserer Zerlegung enthält. Diese Grundmengenschachtelung zieht sich auf eine Spalte zusammen, die in irgendeiner Grundmenge unserer Zerlegung enthalten sein müßte.

Wir haben hier nur benutzt, daß es von jeder Stufe nur endlich viele Grundmengen gibt.

Der bei TORNIER in § 7 auftretende Begriff der $\mathfrak{k}$-offenen Mengen ist für unsere Metrik nichts anderes als der Begriff der offenen Mengen; denn die $\mathfrak{k}$-offenen Mengen waren die Summen von Mengen aus $\mathfrak{k}$, also Summen von Grundmengen. Die Grundmengen waren unsere ursprünglichen Umgebungssysteme, und allgemein werden die offenen Mengen als Summen von Umgebungen erklärt. Jede $\mathfrak{k}$-offene und damit auch jede K-offene Menge ist eindeutig als Summe von paarweise fremden, größten, echten Teilgrundmengen darstellbar.

Es kommt bei unserer ganzen Inhalts-, Maß- und Integrationstheorie nicht darauf an, daß wir angeben, was eine Grundmenge ist, sondern wir brauchen nur den kleinsten Körper $\mathfrak{k}$ über den Grundmengen zu kennen. Gehen wir vom Nullraum zum Ring über, so können wir $\mathfrak{k}$ auch als kleinsten Körper über den dort zahlentheoretisch definierten Umgebungen ansehen, d. h. $\mathfrak{k}$ besteht genau aus den Summen von Restklassen modulo natürlichen Zahlen. Denn die Grundmengen sind genau die Restklassen mod $m(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$; darum ist jede Restklasse Summe von Grundmengen, und umgekehrt ist jede Grundmenge eine Restklasse.

Nun ordnen wir den Grundmengen Inhalte zu. Jeder Grundmenge E ordnen wir eine nichtnegative Zahl $J(E)$ so zu, daß $J(E) = \sum_{\nu} J(E^{(\nu)})$ ist, wenn $E = E^{(1)} + E^{(2)} + \cdots + E^{(n)}$ die Zerlegung von E in paarweise fremde Grundmengen nächsthöherer Stufe ist. Dazu benutzen wir das in § 5 von TORNIERS Wahrscheinlichkeitsrechnung Gesagte, wo eine zweifach unendliche Matrix als Folge ihrer Spalten aufgefaßt wird. Wir nehmen an, daß jede Folge wirklich in unserem Nullraum vorkommt. Wir nennen eine solche Spaltenfolge ein Modell, wenn für jede Grundmenge E der Limes der relativen Häufigkeit der in E liegenden Spalten unserer Folge existiert und gleich dem „Inhalt" dieser Grundmengen ist. Dann gilt von selbst das gleiche nicht nur für Grundmengen, sondern für alle Mengen mit Inhalt, und auch die K_1-Integrale gestatten eine Häufigkeitsdeutung in jedem Modell. Wir richten es so ein, daß unsere Ausgangsmatrix ein Modell wird. Zu diesem Zweck überzeugen wir uns, daß bei dieser Matrix die Dichten existieren. Dann definieren wir den Inhalt einer Grundmenge durch die Dichte in der Matrix (a_{ik}). Weil jede Grundmenge nur aus endlich vielen Grundmengen nächsthöherer Stufe besteht und weil in diesem Umfang die Dichte noch additiv ist, gelten sämtliche Axiome der Inhaltstheorie. Wir sollen eine Grundmenge, d. h. eine

Restklasse mod $m(n)$ hernehmen, in unserer Spaltenfolge (a_{ik}) diejenigen Spalten aufsuchen, die dieser Grundmenge angehören, deren Spaltenindex der betreffenden Restklasse mod $m(n)$ angehört. Wir haben deren Anzahl zwischen 1 und l zu ermitteln, die Anzahl durch l zu dividieren und l gegen Unendlich streben zu lassen. Dabei wird sich die Dichte $\frac{1}{m(n)}$ ergeben. Um die Dichte der Restklasse $a \pmod m$ auszurechnen, bemerken wir zunächst, daß die Anzahl der Elemente dieser Restklasse von 1 bis l, als Funktion von l aufgefaßt, für $l = 0$ verschwindet und gerade an den Stellen $l \equiv a \pmod m$ um 1 zunimmt. Deshalb ist diese Anzahl gleich $\left[\frac{l-a+m}{m}\right]$ mit $0 < a \leq m$. Diese Anzahl dividieren wir durch l, subtrahieren $\frac{1}{m(n)}$ und zeigen, daß der Rest gegen Null geht:

$$\frac{1}{l}\left(\left[\frac{l-a+m}{m}\right]-\frac{1}{m}\right)\Bigg| < \frac{2}{l}.$$

Eine Restklasse mod n besteht aus $\frac{m(n)}{n}$ Restklassen mod $m(n)$, diese hat daher die Dichte $\frac{1}{n}$. Damit können wir die Dichte sämtlicher a-o-Mengen bestimmen; das sind aber nur die Summen endlich vieler Grundmengen, also die Summen von Restklassen. Wir ordnen damit jeder Restklasse mod n den Inhalt $\frac{1}{n}$ zu und einer Summe paarweise fremder Restklassen die Summe der entsprechenden Inhalte. Dann gelten die Axiome der Inhaltstheorie. Aus der allgemeinen Theorie folgt, daß jede Inhaltsmenge unseres Nullraumes, also unseres Prüferschen Ringes, inhaltsgleiche Dichte hat.

Um die Dichte einer Menge natürlicher Zahlen zu berechnen, brauchen wir sie nur in eine Inhaltsmenge des Prüferschen Ringes so einzubetten, daß diese Inhaltsmenge keine andere natürliche Zahl enthält. Dann ist die Dichte der Folge gleich dem Inhalt dieser Menge. Natürlich wird es auch Folgen geben, für die eine Dichte existiert, für die aber diese Berechnung versagt.

§ 5. Anwendungen.

Wir wollen hier eine prinzipiell wichtige allgemeine Überlegung einschalten: Gegeben sei ein Nullraum, in dem die Axiome der Maß- und Inhaltstheorie gelten, und eine Menge von Matrizen, die Modelle sind. Als Beispiel nehmen wir den soeben bewerteten Prüferschen Ring und als einziges Modell die Matrix (a_{ik}), also die Folge der

natürlichen Zahlen. Dann gilt unser besonderes Interesse den K_1-offenen Mengen mit maßgleicher Dichte. Es gilt nämlich, daß für jede Spaltenfolge die untere Dichte einer K_1-offenen Menge größer oder gleich ihrem Maß ist. Denn es sei $O = \sum_\nu E^{(\nu)}$. Dann gilt für je endlich viele $E^{(\nu)}$

$$\underline{\lim}\, r(F,O)_k \geqq \sum_\nu \lim r(F,E^{(\nu)})_k = \sum_\nu |E^{(\nu)}|,$$

wo $r(F,\mathfrak{M})_k$ die relative Häufigkeit derjenigen unter den k ersten Elementen von F ist, die Elemente von $\mathfrak{M}$ sind, also ihre Anzahl dividiert durch k. Die rechte Seite unterscheidet sich aber beliebig wenig von $|O|$. Dabei bedeutet $|\mathfrak{M}|$ das Maß einer Menge $\mathfrak{M}$, und $\lim r(F,\mathfrak{M})_k$ ist ihre Dichte, falls sie existiert. Nun sollen O und O' maßgleiche Dichte haben. Es gilt

$$\underline{\lim}\, r(F,OO')_k \geqq |OO'|$$

und

$$\underline{\lim}\, r(F,O+O')_k \geqq |O+O'|.$$

Aus

$$O+O' = O + (O' - OO')$$

folgt

$$\overline{\lim}\, r(F,O+O')_k \leqq \overline{\lim}\, r(F,O)_k + \overline{\lim}\, r(F,O'-OO')_k,$$

$$\overline{\lim}\, r(F,O'-OO')_k \leqq \overline{\lim}\, r(F,O')_k - \underline{\lim}\, r(F,OO')_k.$$

Somit gilt

$$\overline{\lim}\, r(F,O+O')_k \leqq \lim r(F,O)_k + \overline{\lim}\, r(F,O')_k - \underline{\lim}\, r(F,OO')_k,$$

also

$$|O+O'| \leqq \overline{\lim}\, r(F,O+O')_k \leqq |O| + |O'| - |OO'| = |O+O'|.$$

Wir erhalten damit

$$|O+O'| = \overline{\lim}\, r(F,O+O')_k.$$

Somit hat auch $O+O'$ maßgleiche Dichte, daher auch OO' wegen $OO' = O - \{(O+O') - O'\}$.

Die K_1-offenen Mengen mit maßgleicher Dichte bilden daher einen Ring $\mathfrak{R}$. Die Mengen des kleinsten Körpers $\mathfrak{K}$ über dem Ring $\mathfrak{R}$ haben ebenfalls maßgleiche Dichte, also auch die des Inhaltskörpers $\mathfrak{K}_1$ über dem kleinsten Körper $\mathfrak{K}$. Die Summen abzählbar vieler Mengen aus $\mathfrak{K}_1$ heißen wieder $\mathfrak{K}_1$-offen. Wir betrachten die $\mathfrak{K}_1$-offenen Mengen mit maßgleicher Dichte. Sie bilden wieder einen Ring $\mathfrak{R}^1$. Der kleinste Körper $\mathfrak{K}^1$ über $\mathfrak{R}^1$ hat wieder nur Mengen mit maßgleicher Dichte, also auch der zugehörige Inhaltskörper $\mathfrak{K}_1^1$. So können wir beliebig fortfahren. Wir nehmen die Vereinigungsmenge aller dieser Körper,

das ist ein Körper $\mathfrak{K}_\omega$. Jetzt bilden wir die Menge aller $\mathfrak{K}_\omega$-offenen Mengen mit maßgleicher Dichte. Sie bilden einen Ring; hierüber liegt ein kleinster Körper; der Inhaltskörper darüber heiße $\mathfrak{K}_{\omega+1}$ usw. Dieser Körperturm muß nach bekannten Prinzipien der Mengenlehre abbrechen.

Diese Hervorhebung der offenen Mengen mit maßgleicher Dichte hat deshalb ihre Berechtigung, weil sich leicht Beispiele offener Mengen mit maßungleicher Dichte angeben lassen. Wir betrachten zunächst folgendes Beispiel: n durchlaufe von 2 ab alle Primzahlpotenzen. Wir summieren die Restklassen 1 (mod 2), 2 (mod 6), 4 (mod 12), 6 (mod 60) usw., immer mod $m(n)$ die Restklasse, die das erste noch nicht erfaßte Element enthält. Diese Restklassen sind fremd. Die Summe ihrer Inhalte ist nach dem Quotientenkriterium $\sum \frac{1}{m(n)} < \frac{5}{6}$. Trotzdem stellt diese Restklassensumme die offene Menge sämtlicher natürlicher Zahlen dar. Dieses Ergebnis können wir noch verallgemeinern, indem wir folgenden Satz von TORNIER umkehren:

Zu jeder meßbaren Menge ohne Inhalt gibt es eine Matrix, in der diese Menge eine maßungleiche Dichte hat.

Wir beweisen folgende Umkehrung:

Zu jeder Matrix gibt es eine meßbare Menge ohne Inhalt, die eine maßungleiche Dichte hat.

Zum Beweis wählen wir $n(k)$ so, daß $\sum \frac{1}{n(k)} < 1$ ist, und bilden über alle k die Summe der Grundmengen $n(k)$-ter Stufe, die die k-te Spalte enthalten. Das ist eine offene Menge mit der Dichte 1 und einem Maß $\leqq \sum \frac{1}{m(n(k))} < 1$. Dieses Ergebnis gilt zunächst nur für unseren speziellen Inhaltskörper; doch gilt es auch für ganz allgemeine Nullräume, vorausgesetzt, daß mit wachsendem n der größte Inhalt einer Grundmenge n-ter Stufe gegen Null strebt.

Man könnte nun vermuten, daß jede Folge mit positiver unterer Dichte wenigstens eine Grundmenge enthalten müßte. Wir zeigen an folgendem Beispiel, daß dies nicht der Fall ist. Die Menge enthalte alle Zahlen außer den Zahlen

$$n! + 1, n! + 2, \ldots, 2n! \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots;$$

sie besteht also aus den Zahlen

$$1, 5, 6, 13, 14, 15, \ldots.$$

Für diese Folge ist die untere Dichte $\frac{1}{2}$, die obere Dichte 1. Diese Menge kann keine Restklasse enthalten, da sie sonst auch eine Restklasse mod n enthalten müßte.

Literaturverzeichnis.

H. Prüfer, *Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie.* Math. Annalen 94 (1925), S. 198—243.

E. Tornier, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Acta math. 60 (1933), S. 239—380.

W. Feller und E. Tornier, *Maß- und Inhaltstheorie des Baireschen Nullraumes.* Math. Annalen 107 (1933), S. 165—187.

— —, *Mengentheoretische Untersuchung von Eigenschaften der Zahlenreihe.* Math. Annalen 107 (1933), S. 188—232.

E. Tornier, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrationstheorie.* Leipzig und Berlin 1936.

H. Hasse, *Vorlesungen über algebraische Zahlentheorie* I, II (Ausarbeitung im Mathematischen Institut der Universität Göttingen).

Lebenslauf.

Am 16. Januar 1912 wurde ich, Heinrich Kleinsorge, als dritter Sohn des techn. Reichsbahnoberinspektors Heinrich Kleinsorge und seiner Ehefrau Karoline geb. Krug in Paderborn geboren. Ich besuchte die evang. Volksschule und anschließend die Oberrealschule in Göttingen, wo ich Ostern 1931 die Reifeprüfung bestand. Hierauf studierte ich Mathematik, Physik und Chemie in Göttingen und München und hörte Vorlesungen bei den Herren Professoren HASSE, HERGLOTZ, PERRON, TIETZE, TORNIER, POHL und WINDAUS. Im Februar 1936 bestand ich die Staatsprüfung für das höhere Lehramt in Göttingen. Seit Ostern 1937 bin ich als Studienreferendar an der Oberschule für Jungen in Göttingen tätig.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Professor Dr. TORNIER, dem ich auch an dieser Stelle meinen Dank ausspreche.